B. N. C.
FIRENZE
1052
8

Digitized by Google

Digitized by Google

Res. 1052. 8

1058.8

B

XI
RICC
1052.8

MICHAELIS ANGELI RICCII GEOMETRICA EXERCITATIO.

ROMÆ, Apud Nicolaum Angelum Tinaſſium M. DC. LXVI.

Superiorum permiſſu ;

1052
8

ABBATI
STEPHANO GRADIO.
MICHAEL ANGELVS RICCIVS S·P·D·

SCRIPTIONEM hanc meam argumenti, vt vides, inter Mathematica difficillimi, ſed æquè ad difficiliora quæque problematum efficienda, & obſcuriora Theorematum cognoſcenda vtiliſſimi, cùm in Geometrico, tùm in Analytico puluere; ad te mittendam duxi, vir ornatiſſime, STEPHANE GRADI, quem ego vnum omnium huius Ciuitatis plurimi facio, ob egregias animi laudes, præſertim verò propter acre his de rebus exiſtimandi iudicium, quotidianis grauiſſimarum inter nos diſputationum experimentis mihi perſpectum & cognitum. Lege quæſo illam diligenter, & vbi diù exactiſſimæ tuæ cenſuræ ſubiectam habueris, ecquid reſpondeat ſolitæ tuæ de meis hoc in genere cogitationibus, opinioni, pronuncia. Nam ſi hoc aſſequar, vt tibi cæteriſque Amicis earundem Diſciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in poſterum quam ob rem humaniſſimis tuis hortationibus obluctér, cum autor mihi eſſe perſeuerabis edendi alia quæ tecum iampridem communicaui, de præceptis vniuerſæ Artis analyticæ, geometricæ methodo breuiter & expeditè demonſtratis, vna cùm animaduerſione erratorum quæ in ipſis tradendis magni nominis Auctores erraſſe deprehendi; faciliùſq; obtinebis ne diutiùs premam apud me quæcumque de Geometria in genere diſputata & literis conſignata in certas propoſitiones redegi; & ex his illam præcipuè à Torricellio, & à te quoq; tantopere commendatam, quæ integram doctrinam triginta propoſitionum Archimedis, Lucæ Valerij, & aliorum, vna complectitur; duaſque præterea, qui-

bus totam penè Io. Caroli dela Faille de centro grauitatis partium circuli & ellipſeos doctrinam [iuſto volumine ab ipſo explicatam] abſoluo. Statui autem pauca aliquot huius ſcripti exemplaria typis imprimere, quò commodiùs poſſint ad peritos huiuſmodi ſcientiarum Amicos, tùm per Italiam, tùm exteras apud gentes peruenire, accenſo potiùs ea in re tuo ſtudio obſecutus, quàm ingenio meo. Neque enim is ego ſum, cui nomen famæ per ambitionem ingerere libeat; aut quem non magis indagatæ veritatis cognitio, quam cognitæ oſtentatio delectet. Interim hunc amicitiæ noſtræ iampridem inſtitutæ, & literario præcipuè commercio nunquam coli intermiſſa, fructum iucundiſſimum feram, vt quæ hac in re de me ſentis amicè, hoc eſt [vt Euripidi placet] liberè, te loquentem audiam; eoque, quid cæteri & ſentiant & loquantur ſecurus fiam. Vale. Romæ octauo Idus Iulij 1666.

DEFINITIONES.

1 Poteſtatem quamlibet, eiuſque radicem, voco, dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, vt A 2, in, B 3, fiet productum A 2 in B 3; cui producto illud ſimile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypotheſi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, ſimile eſt producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta ſunt quæ ad eundem gradum pertinent; vt duo rectangula, quippè quæ ad ſecundum gradum pertinent; & duo ſolida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros ſeu æquales ſeu inæquales, vel numerum & vnitatem, vel duas vnitates. Terminos inæquales appello duos numeros inæquales, vel numerum & vnitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas vnitates.

5 Productum in linea fieri ſecundum terminos datos, aut poſitos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes ſunt ipſi termini dati vel poſiti; radices verò ſegmenta illius rectæ lineæ ſectæ in proportione terminorum eorumdem.

Sit verbi cauſa, quæpiam recta linea, cuius maius ſegmentum ad minus ſit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo ſegmenti maioris in quadratum minoris erit factum in linea data ſecundum terminos poſitos 3, & 2; quia ſegmenta quæ ſunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum ſunt etiam 3, & 2.

Rurſus eſto quemadmodum ſegmentum maius ad minus eiuſdem lineæ, ſic 3 ad 1, productum ex cubo maioris ſegmenti in ſegmentum ipſum minus, erit productum in linea factum ſecundum terminos poſitos, numerum & vnitatem. Ita; A 3 in B 1 [ſi A vocetur maius ſegmentum, B verò, minus] eſt productum factum in linea A + B ſecundum terminos 3, & vnitatem, quia radices A & B ſic ſunt, vt eſt numerus 3 ad vnitatem; & dignitatis A 3 exponens eſt, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens eſt, vnitas, item data.

Lemma primum.

SI duæ rectæ in eadem ratione ſecentur, producta ſimilia facta ex ſegmẽtis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quæ fient ex totis.

Sint



Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F ita ſectæ, vt quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum ſegmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ ſunt ſimilia per ſecundam definitionem; ijſque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5 per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in F E 3 ad D E 5. Quia rationes ex quibus ratio producti A C 2 in C B 3 ad A B 5 componitur, eædem ſunt ac componentes rationem producti D F 2 in F E 3 ad D E 5; ob ſectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa reſultant. Quod, &c.

Lemma ſecundum.

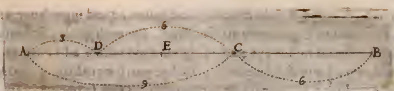
Iſdem poſitis, Dico, ſi A C 2 in C B 3 fuerit maximum omnium ſimilium productorum ex binis ſegmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum ſimilium ex binis ſegmentis rectæ D E, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex ſegmentis rectæ D E alia reſpondent orta ex ſegmentis rectæ A B in eadem proportione ſectæ; & illa ad homogeneum ſuum D E 5 eandem rationem habent, atque iſta ad ſuum A B 5, ex primo Lemmate. Ratio quidem A C 2 in C B 3 ad A B 5, ex hypotheſi, eſt eadem, ac ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5: cæterorum verò productorum ex ſegmentis ipſius D E ad D E 5, eadem eſt atque ratio productorum ſibi reſpondentium, quæ fiunt ex ſegmentis rectæ A B, ad A B 5. Cùm igitur ratio A C 2 in C B 3 [quod maximum eſſe ponitur] ad A B 5 ſit maior, per octauam quinti Elem., ratione ceterorum productorum ſibi ſimilium ad A B 5; maior etiam erit ratio D F 2 in F E 3 ad D E 5, quàm ratio ceterorum ſimilium productorum ex ſegmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipſum D F 2 in F E 3 per decimã quinti Elem. eſt maximum. Quod, &c.

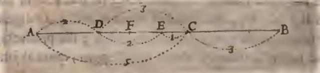
Lemma tertium.

Si data recta linea ſecetur in ratione terminorum inæqualium, & diuidendo, fiat ſegmentorum differentia ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inuenta proportionalitas vel ipſa erit proportionalitas æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum diuidendo, & ſic deinceps; & in eâ terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia ſegmentorum ſegmento minori.

Eſto



Eſto A C ad C B, vt 9 ad 6, & A D differentia ſegmentorum A C, C B: erit diuidendo , 3 ad 6, vt A D. ad C B, vel ad ſegmentum ſibi æquale , D C: Quoniam verò hæc proportio non eſt proportio æqualitatis, fiat D E differentia ſegmentorum A D, & D C; 3, differentia numerorum 6 & 3; & diuidendo, erit, vt 3 ad 3, ſic D E ad A D, proportio æqualitatis.



Rurſus A C ſit ad C B, vt 5 ad 3; & A D ſegmentorum differentia; diuidendo erit; A D ad C B, ſeu ad ſibi æquale ſegmentum D C, vt 2 ad 3. Et iterum diuidendo [ſegmentorum A D & D C, eſto, differentia, E C,] 1 ad 2 vt E C ad A D ſeu D E; & tertiò [facta F E terminorum D E & E C differentia] diuidendo inueniemus, vt 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod &c.

Ratio Lemmatis eſt, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & vnitatis, ſemper eſt numerus aut vnitas, vt per ſe patet: & nos diuidendo, ſemel atque iterum, ac ſæpius, demimus ſemper minorem terminum diuiſæ proportionalitatis qui eſt numerus vel vnitas, de maiori termino ſeu numero, vtimurquè deinceps reſiduo tantùm [quod eſt eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diuiſæ: at non poſſumus ſic demendo progredi in infinitum, quia vnitates in terminis ſunt finitæ, ſed exhauritur tandem omnis differentia, reſiduumq; maioris termini proportionalitatis diuiſæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua vnitas ad vnitatem, vel numerus ad ſibi æqualem numerum, eſt vt ſegmentum ad aliud æquale ſegmentum. Quod oſtendere oportebat.

Quod ſi ab ea proportione æqualitatis, in qua deſitum eſt, rurſus incipiamus, Dico nos componēdo gradatim, venturos per veſtigia diuiſionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua ſegmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cuius propoſitionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non poteſt, in Geometria omnia quæ diuidendo concluduntur, ex contrario conuerti

uerti poſſe , & componendo concludi illud ipſum , quod ponebatur ante diuiſionem , vt in quinto Elementorum oſtenditur . Exempli gratia , ſit maius ſegmentum datæ rectæ ad minus , vt 2 ad 1. Igitur diuidendo 1 ad 1, eſt vt differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum . Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem , in qua ſegmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod &c.

Lemma quartum.

SI duo quælibet producta orta ſint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter ſe, eandem habent duo producta . Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas B C 5 ad dignitatem E F 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas A B 3 illa producta efficit .

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alij in numeris demonſtrarunt.

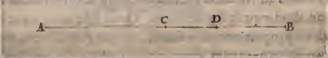
Lemma quintum.

DAtis quatuor quantitatibus ~~proportionalibus~~, quarum prima ad ſecundam habeat minorem rationem , quàm tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis eſt minus producto ex medijs.

Augeatur prima donec fiant quatuor geometricè proportionales ; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex medijs. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur , erat productum minus eodem producto ex quantitatibus medijs. Quod &c.

THEOREMA PRIMVM.

PRoductum in aliqua recta linea factum ſecundum poſitos terminos æquales , maximum eſt omnium ſimilium productorum , quæ fieri poſſunt ex binis lineæ datæ ſegmentis tanquam ex radicibus .



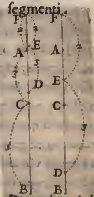
Recta linea A B ſecetur æqualiter in puncto C , & ſit A C ad C B vt 3 ad 3 [termini æquales poſiti] Dico productum A C 3 in C B 3 , quod fit in linea A B ſecundum poſitos terminos , eſſe omnium ſimilium productorum maximum .

mum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud ſimile productum A D 3. in D B 3. Cum autẽ ſint quatuor lineæ aritmeticè proportionales cum exceſſu C D, nimirum A D, A C, C B, & B D, minor eſt ratio maximæ A D ad A C, quàm C B ad B D; & triplicata ratio ipſius A D ad A C [ſeu ratio A D 3 ad A C 3] minor eſt, quam triplicata ipſius C B ad B D [ſeu C B 3 ad B D 3] & per quintum Lemma, productum ex medijs quantitatibus, A C 3, in C B 3, maius eſt producto A D 3 in B D 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonſtratur A C 3 in C B 3 eſſe alio quocumque ſimili producto maius, & conſequenter omnium ſimilium maximum. Quod &c.

THEOREMA SECVNDVM.

SI duo rectæ lineæ ſegmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per conſequens, diuidendo ſit, differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ ſegmentorum ducta in dignitatem minoris ſegmenti fit productum maximum, toties fit etiam maximum ex eadem dignitate minoris ſegmenti ducta in dignitatem maioris; atque ita, ſi dignitates ſegmentorum pro exponentibus habeant terminos poſitos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit A B recta linea inæqualiter ſecta in puncto C, & B C ad A C, vt 5 ad 3, qui ſint termini poſiti. Producatur B A in F, donec æquetur F C ipſi C B, & A F erit differentia ſegmentorum B C & A C. Quoniam verò ſegmentum maius B C ſic eſt ad minus C A, vt 5 eſt ad 3, erit diuidendo A F ad C A, vt eſt 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum F A 2 in A C 3, ex dignitate ipſius F A, differentiæ ſegmentorum, ducta in dignitatem minoris ſegmenti A C. Secundum A C 3 in C B 5, ortum ex eadem dignitate minoris ſegmenti ducta in dignitatem maioris. Prima dignitas F A 2 habet pro exponente, 2, differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos poſitos, vt imperabatur. Dico, ſi productum primum eſt maximum omnium ſimilium ex binis ſegmentis rectæ F C [eſſe autem eiuſmodi ſupponamus], etiam ſecundum fore productum maximum omnium ſimilium ex binis ſegmentis rectæ poſitæ A B.



Sumatur in A B alius punctus præter punctum C, & eſto D, qui accipi à nobis poteſt infra punctum C, vel ſupra. In vtroque caſu, F A nequit habere eam rationem ad A C, quam habet ad A D, ſed maiorem aut minorem habebit, atque

adeò

adeò F D non eſt ſecta in puncto A ſecundum rationem ipſius F A ad A C: fiat porrò F E ad E D, vt F A ad A C, & productum F E 2 in E D 3, per ſecundum Lemma, erit maximum [æquè ac productum F A 2 in A C 3] & conſequenter maius ſimili producto F A 2 in A D 3, facto ex ſegmentis eiuſdem rectæ F D. Quod maximum F E 2 in E D 3 habet eandem rationem ad F D 5, dignitatem ſibi homogeneam, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5, vt ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur F A 2 in A D 3 [quod diximus eſſe minus producto F E 2 in E D 3] minorem rationem habet ad F D 5, quàm F E 2 in E D 3 ad idem F D 5, ſeu minorem, quam F A 2 in A C 3 ad F C 5; & permutando, F A 2 in A D 3 minorem habet rationem ad F A 2 in A C 3 [ſeu, per Lemma quartum, A D 3 minorem habet rationem ad A C 3] quam F D 5 ad F C 5, & longè minorem, quàm C B 5 ad B D 5. Quippe ſunt rectæ D B, C B, F C, & F D, aritmeticè proportionales cum exceſſu, D C; ac propterea in primo caſu, F D maxima, in ſecundo caſu, F D minima, eſt ad F C in minori ratione quàm C B ad D B, & quintuplicata ratio F D ad F C, nempe ratio ipſius F D 5 ad F C 5, eſt minor quintuplicata ratione C B ad D B, ſeu C B 5 ad D B 5.

Igitur cum quatuor quantitatum, A D 3, A C 3, C B 5, & D B 5, prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum A D 3 in D B 5 factum ex duabus extremis erit minus producto A C 3 in C B 5 ex medijs. Similiter oſtendes, aliud quodcumque productum ſimile minus eſſe producto A C 3 in C B 5, quia punctus D ad libitum ſumitur. Ergo A C 3 in C B 5 productum eſt maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea A B inæqualiter ſecta, quum eſt ſegmentum maius ad minus, vti numerus ad numerum. Reſtaret altera pars Theorematis, quum eſt quemadmodum maius ſegmentum ad minus, ſic numerus ad vnitatem. Hoc tamen conſtructione ac ratione tàm ſimilibus modò factis concluditur, vt id ſibi quiſque inuenire, explicare ac dilatare facillime poſſit. Lectoribus autem ſcribimus à Geometria & ab Algebra inſtructioribus, quos huiuſcemodi rerum intellectu facilium explicatione fruſtra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua vſum præſtantiſſimum habentia ad inueniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra grauitatis & quadraturas, & ad alia item multa, quæ iuſto ſeruamus Operi; vbi dabimus nouam ſolidorum Conicorum ſeriem, qui ſecti exhibent infinitas, vti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipſes, &, analogiam ſeruando, circulos etiam infinitos. Vnde Lectoribus manifeſtè apparebit, de Conicis me plus multò adinueniſſe, quàm ceteros, eoſque ingenioſiſſimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolen, ellipſim, & circu-

lum

lum [figuras Conici in noſtra noua ſerie prædicta, ſecundi gradus] agnouerunt: alias tertij & quarti & cæterorum non item; niſi quod de parabolis infinitis per puncta in plano deſcriptis pauca, licet cognitione digniſſima, tradidere nonnulli; quos inter, duo præcellentes ingenio viri, Fermatius, ac Torricellius, præceptor meus, inuentorum præſtantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui nouum inſuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quamplures Apollonij propoſitiones atque demonſtrationes aptari ſectionibus noſtris & per omnia congruere, affectaſque multipliciter æquationes harum ſectionum ope reſolui facillimè, & determinari poſſe. Nunc reuertor ad rem.

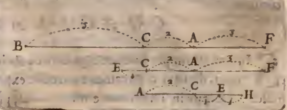
THEOREMA TERTIVM.

Data recta linea, & duobus terminis, ſecundum quos fiat in linea data productum: hoc erit maximum omnium ſimilium productorum, quæ fieri poſſunt ex binis eiuſdem rectæ ſegmentis, velut ex radicibus.

Propoſitionem ſeco in partes duas. Primum dico, productum, quale deſcripſimus, eſſe omnium ſimilium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonſtrauimus.

Deinde ſi dantur termini inæquales, ſiorem oſtendo.

Eſto A B recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C, ſitque B C ad C A, vt 5 ad 2. Dico productum B C 5 in C A 2 factum in linea data ſecundum terminos datos eſſe maximum. Producatur B A in F, vt A F ſit differentia ſegmentorũ, & diuidendo primã proportionalitatẽ, nempe B C ad C A, vt 5 ad 2 [ſicut in tertio Lemmate præſcribitur] pergamus vſque dum incidamus in proportionem æqualitatis. In noſtra hypotheſi, primum erit, diuidendo, 3 ad 2, vt F A differentia ſegmentorum ad A C minus ſegmentũ; quam ſecũdam proportionalitatem exhibet ſecunda figura, in qua fiat C E differentia ſegmentorum C A, F A: per conſequens erit, diuidendo, 1 ad 2, vt C E ad A C; quamquidem proportionalitatem ſeorſim exhibet tertia figura. Fiat E H differentia ſegmentorum C E & A C, diuidendo erit 1 ad 1, vt E H ad E C; quæ eſt demum proportio æqualitatis: ſemper autem minus ſegmentum producimus vt æquemus maiori, & ſegmentorum differentiam conſtituamus.



At retrorſum viciſſim, incipiendo, à recta E A tertiæ figuræ, cuius maius ſegmentum A C eſt 2, minus ſegmentum C E eſt 1, & illorum differentia H E itidem 1. Quoniam productum H E 1 in C E 1 eſt maximum in linea C H, per primum Theorema noſtrum, erit proinde, per ſecundum Theorema, E C 1 in C A 2 maximum in recta E A.

Deinde in recta F C ſecundæ figuræ, maius ſegmentum A F eſt 3, minus A C eſt 2, & ſegmentorum differentia E C eſt 1; porrò cum E C 1 in C A 2 ſit maximum, erit per ſecundum Theorema, etiam maximum in recta F C productum A F 3 in A C 2.

Poſtremò in linea A B primæ figuræ, productum A F 3 in A C 2 eſt maximum, vt modò oſtendimus, ergo per ſecundum Theorema eſt etiam maximum A C 2 in B C 5. Quod demonſtrandum erat.

Si loco duorum numerorum detur numerus, & vnitas, fit ſimilis conſtructio, & demonſtratio.

SCHOLION.

ID quod in ſecundo Theoremate ſupponebamus; data recta linea, & datis numeris, 3 & 2, maximum fore productum in ea linea factum ſecundum numeros illos datos; nunc demonſtrauimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propoſitio conditionalis, ex poſita illa hypotheſi, non abſoluta, vt patebit conſideranti.

COROLLARIVM.

SI productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumq; maximum fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt geometricè proportionales. Quippe in Theoremate oſtendimus, productum in linea factum ſecundum terminos datos eſſe omnium maximum; at productum eiuſmodi, ex 5. definitione noſtra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habet, quam dignitatum earundem radices.

PROBLEMA PRIMVM.

DAtam lineam rectam ita ſecare, vt productum ex dignitatibus ſegmentorum ſit omnium ſimilium maximum.

Sumantur exponentes duarum illarum dignitatum, rectaque diuidatur in ratione horum exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productum erit in linea data factum ſecundum terminos poſitos, nimirum ſecundum exponentes; ac proinde erit maximum per Theorema tertium.

PRO-

PROBLEMA SECVNDVM.

AEquationem determinare, in qua poteſtas quæſita radicis negatur de homogeneo ſub radice data, & dignitate ſua parodica, vt B in A-A 2||Z 2: vel B in A 3-A 4||Z 4 &c.

Oritur huiuſmodi æquatio ex dicta parodica dignitate poteſtatis negatæ ducta in B-A, differentiam datæ & quæſitæ radicis. Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, ſi primùm ducatur in A, radicem quæſitam negatam, gignet poteſtatem negatam vno gradu altiorem, quàm ſit ea parodica dignitas [vt patet ex natura multiplicationis]: deinde in + B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, ſub eadem dignitate parodica & radice data: Quæ duo producta ſunt ipſa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera eſt homogeneum comparationis.

Rurſus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad poteſtatem negatam eſt eadem, ac radicis datæ ad quæſitam; ſed minor eſt poteſtas homogeneo, de quo ipſa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæſita minor eſt data; In qua proinde radice data nos recte ſumimus ſegmentum æquale radici quæſitæ A, vt alterum ſegmentum ſit B-A, differentia datæ ac quæſitæ radicis.

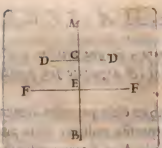
Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B-A vno radicis datæ ſegmento, ducto in alterum ſegmentum A, vel in huius poteſtatem, efficitur [per tertium Theorema] vt inde reſultans productum ſit maximum omnium ſimilium, quotieſcunque A, & B-A, ſegmenta rationem habent eam, quam exponentes ſuarum dignitatum. Sic in æquatione B in A 3-A 4||Z 4; ſi A, & B-A fuerint vt 3 ad 1, cubus ſegmenti A in B A ductus gignet partem æquationis B in A 3-A 4; quæ eſt productum in linea data B, omnium ſimilium maximum; cuius proinde magnitudinem non poteſt vnquam excedere homogeneum comparationis, quod ſemper æquari neceſſe eſt illi alteri æquationis parti. Vnde canon pro determinanda problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum ſecundum terminos, qui ſunt exponentes eiuſdem radicis & parodicæ dignitatis, ſub quibus eſt homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non poteſt homogeneum comparationis.

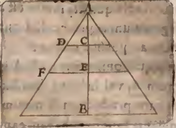
Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipſius, A, in B-A, vel in huius poteſtatem; ſemper enim eſt idem caſus tertij Theorematis noſtri, in quo productum factum in linea [ſeu data radice B] ſecundum terminos datos eſt maximum: termini verò ſunt exponentes dignitatum ſegmenti A & alterius B-A.

Sed vno vel altero exemplo dè Geometricis noſtris Opuſculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

E ſin-



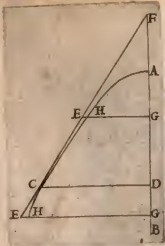
E ſingulis punctis datæ rectæ A B ducantur rectæ C D, E F &c. rectæ inter ſe parallelæ, cum data A B angulum quemcumque efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abſciſſarum A C, A E &c. geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere poſſe mox patebit) Tranſibit per extrema parallelarum puncta, D, F &c. perimeter figuræ, cuius diameter aut axis erit A B, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipſæ parallelæ.



Nam parallelarum abſciſſarumque dignitates ſi fuerint eiuſdem gradus, exempli gratia F E 1 ad D C 1, vt A E 1 ad C A 1; vel cubi parallelarum vt cubi abſciſſarum, figura erit triangulum, cuius proprietas notiſſima eſt, non parallelas modò & abſciſſas eſſe geometricè proportionales, ſed parallelarum & abſciſſarum earumdem poteſtates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex eſt rationis linearum ſeu radicum; ita vt cubi, & quadrato quadrata &c. abſciſſarum ſint vt cubi, & quadrato quadrata &c. parallelarum; & illorum quoque radices geometricè proportionales.

Sin autem diuerſorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abſciſſarum, linea deſcripta erit curua, habens ſuum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas eſt gradu ſuperior dignitate abſciſſarum; at contra dignitas applicatarum ordinatim ad rectam [quæ curuam in vertice contingit] ſumptam pro axe, gradu inferior eſt dignitate abſciſſarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Eſto

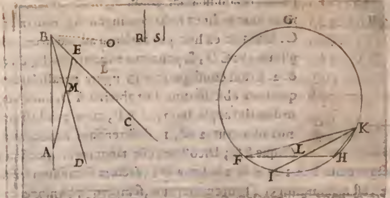


Eſto igitur A C D B vna ex præfatis figuris , eiuſque axis A B, & vertex A ; in qua quidem gradus dignitatis parallelarum ſit altior gradu dignitatis abſciſſarum ; quæratur autem linea recta contingens figuram in pũcto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata , vt C D , & ponantur exponentes dignitatum , 3 , & 2. Erunt conſequenter in figura parallelarum cubi vt quadrata abſciſſarum. Fiat abſciſſa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum , vt minor numerus 2 ad, 1 , differentiam exponentium , ductaque F C ; Dico hanc eſſe tangentem quæſitam.

Productum enim F A 1 in A D 2 in linea D F, factum ſecundum terminos poſitos 1 & 2 , eſt maximum,per Theorema tertium;ſemperque homogeneum dignitati parallelarum ; (cum parallelarum dignitatem exponat maior datorum numerorum , maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorum, quæ duo ſimul efficiunt numerum maiorem). Ergo ſi accipiamus alium punctum G in axe ſupra D, aut infra ,& ducamus ordinatim applicatam G H , quæ ſecet in E rectam F C (vbi opus fuerit productam) ; productum F A 1 in A G 2 non erit maximum in linea F G, quale eſt F A 1 in A D 2 in recta F D ; propterea quod maior eſt vel minor ratio ipſius F A ad A G , quàm ad A D , & conſequenter F G , F D non ſunt proportionaliter diuiſæ . Ergo maiorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F D 3 ſibi homogeneum, quàm F A 1 in A G 2 ad F G 3 , & permutando , maiorem rationem habet F A 1 in A D 2 ad F A 1 in A G 2, (vel ex lemmate quarto, A D 2 ad A G 2) quàm F D 3 ad F G 3 . Sed A D 2 ad A G 2 ponitur in figura; vt C D 3 ad H G 3 . F D 3 ad F G 3, ob ſimilitudinem triangulorum, vt C D 3 ad E G 3 . Ergo maiorem rationem habet C D 3 ad H G 3 , quàm C D 3 ad E G 3 ; & conſequenter C D maiorem rationem habet ad H G, quàm ad E G , ac proinde H G recta eſt minor quàm E G , & punctus E cadit extra datam curuam A H C H. Eodem pacto de ſingulis punctis ductæ lineæ F C demonſtratur illos cadere ſemper extrà curuam . Ergo F C eſt illius tangens. Quod &c.

Hæ ſunt parabolæ , vt vocant, infinitæ , quarum contingentes lineæ, quo modo ad datum punctum duci poſſint, oſtendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc neceſſarium Lemma.

Lemma ~~quintum~~. Sex



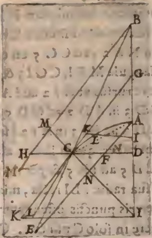
DAto angulo A B C vtcumque ſecto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum ; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C ſubtendat & à recta B D ſecetur in data ratione R ad S.

Fiat H G F ſegmentum circuli capiens angulum æqualem dato , & compleatur circulus ; deinde vt R ad S, ita fiat F L ad L H ; vt angulus A B D ad E B D, ſic arcus H I ad I F ; ductaque I L producatur vſque dum pertingat ad K in circunferentia circuli , & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A ſecet B D in M & B A in puncto A. Dico rectam E A eſſe quæſitam , quæ à B D in M diuiditur in ratione data .

Siquidem anguli H & E: K & B ſunt æquales, & hi ſecti proportionaliter [per trigeſimamtertiam ſexti Elemẽtorum] à K L I, & B D. Ergo triangula F H K, A B E ſunt æquiangula, & A E ad E B, vt H F ad H K. Rurſus æquiangula fecimus triangula M B E, L K H, & conſequenter E B eſt ad E M, vt H K ad H L, & ex æqualitate ordinata A E ad E M, vt H F ad H L, & diuidendo F L ad L H [ſeu R ad S] vt A M ad M E . Quod &c.

Quod ſi punctus datus ſit extra, vt in O, ducemus B O rectam [punctus autem O ſic detur oportet, vt O B recta cum A B angulum faciat, nec ſit ad lineam poſita] & ſumemus angulum A B ~~O pro dato, ſectum à recta B D.~~ æqualem differentiæ ang. EBO et H, vt OL producta ...

Sit



Sit hyperbole A C L, cuius diameter A B, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abſciſſæ ducta in dignitatem, abſciſſæ & diametri ex quibus vna recta conflata intelligatur. Exempli gratia, quadrato cubi ordinatarum, hoc eſt L I 5 ad C D 5, ſint, vt producta B I 3 in A I 2 ad B D 3 in A D 2, genita ex quadratis abſciſſarum A I, A D, & cubis rectarum B I, B D, quippe quas efficiunt eædem abſciſſæ & diameter.

Detur punctus C, ad quem ducenda ſit tangens, & ordinatim applicetur C D. Porrò ducatur B C, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti, A E [ſecans C D in F, & in F item ſecta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta B I 3 in A I 2, & B D 3 in A D 2, ſubtendens angulum E C A] : & tandem G C parallela rectæ A E, occurrens ipſi A B in G. Dico tangentem quæſitam eſſe C G.

Sumatur in C G alius punctus K ſupra & infra C, &, ordinatim applicatis K I ſecantibus hyperbolen in L, ab I puncto inferiori ducatur I C incidens in rectam H B in puncto M, & ſecans A E in N; *quæ H B ipſi A E parallela occurrit D C productæ in H.*

Quoniam vero A E ſecatur in F in ratione 2 ad 3, F A 2 in F E 3, per tertium Theorema, eſt productum maximum, & ratio F E 3 ad N E 3, ſeu H B 3 ad M B 3 [propter ſimilitudinem triangulorum H C B, E C F: M B C, C E N] maior eſt ratione N A 2 ad A F 2. Ergo per Lemma quintum maius eſt H B 3 in A F 2 ipſo M B 3 in N A 2; quę duo producta ſi comparentur cum C G 5, primū habebit maiorem rationem ad C G 5, quàm ſecundum. Sed ratio primi, quod eſt H B 3 in A F 2, ad C G 5 eadem eſt ac ratio B D 3 in A D 2 ad G D 5 [cum H B ad C G ſit

vt

vt B D ad G D, ob ſimilitudinem triangulorum H B D, C G D; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi:tùm C G 2 ad A F 2, vt G D 2 ad A D 2]: ratio ſecundi, ſeu M B 3 in N A 2, ad C G 5 eſt eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia ſimilia ſunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G rectæ earumque cubi proportionales: rurſùs vt G I 2 ad I A 2, ſic C G 2 ad A N 2] Ergo maiorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando, B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [ſeu ex natura hyperboles, C D 5 ad L I 5] maiorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, ſeu [ob ſimilitudinem triãgulorũ K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimã quinti Elem. dignitas, L I 5 minor eſt, quàm K I 5, & ſua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K eſt extra curuam. Sic de ceteris punctis oſtendetur cadere extra curuam, atque adeò C G hyperbolen tangere in ſolo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonſtratio etiam ad ellipſes, & circulos accommodari poteſt.

Iàm verò quàm latè pateat vſus noſtri Theorematis tertij, ex propoſitis exemplis licet intelligere; nec ita multum diſſimili aut difficiliori via centra grauitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, inuenimus. Interim, ſi quis Apollonij conſtructionẽ atque demonſtrationẽ trigeſimæ quartæ propoſitionis primi Conicorum libri cum noſtris comparabit, nonnihil fortaſſe proficiet in arte dilatandi propoſitiones & demonſtrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipſi, & circulo ſtatuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipſes, circuloſque infinitos. Quam viam placuit indicare, & ſupradicto exemplo confirmare.

L A V S   D E O.

1052. γ

Digitized by Google